Contact : maths.puig78@gmail.com

Partie A | Epreuve 1

I existence
- un produit de polynome est un polynome
- $p(a_j) = L_k(a_j) = \prod$ c.a.d si $a_j = a_k \Rightarrow L_k(a_j) = 1$
si $a_j \neq a_k \Rightarrow L_k(a_j) = 0$

Unicité
Par l'absurde si $\exists\, p_i, p_i'$ avec $i \in [0, n]$
$L_k(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x^i = \sum_{i=1}^{n} p_i' x^i \ \forall x \in \mathbb{R}$.
alors $\sum_{i=0}^{n} (p_i - p_i') x^i = 0 \quad x \in \mathbb{R}$
$x = 0 \Rightarrow p_0 = p_0'$
en factorisant x^i et par récurrence $\forall i \in [0, n]\ p_i = p_i'$

(Ou) $k \in [1, n]$, $\sum_{i=0}^{n-1} (p_i - p_i') a_k^i = 0$
(Ou) unicité des coefficients d'un polynome

II 1) (Ensemble polynome est un anneau commutatif)
$\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$
$P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \mapsto (\lambda P(a_1), \dots, \lambda P(a_n))$
$P + Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $P + Q \longrightarrow (P(a_i) + Q(a_i))$

2) $(e_1, \dots e_n)$ la base de $\mathbb{R}^n$
e_k tel que $(0, \dots, 0, e_k, 0 \dots 0)$
alors avec l'hypothèse de linéarité et $a_i \in \mathbb{R}$ deux à 2 distincts
il existe $e_k = \lambda_k P(a_k)$ avec $P(a_k) \in \mathbb{R}$
donc $\forall k \in [1, n]$, $\exists\, k$, $e_k = F(P)$ avec P convenablement choisi

3) Surjectivité
Par l'hypothèse de linéarité et en base de dimension n.
$\forall\, V \in \mathbb{R}^n$ $V = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et
avec $P(a_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$ et $k \in [1, n]$
et les a_i 2 à 2 distincts les $P(a_i)$ sont 2 à 2 indépendants
et $P(a_i) = p_i e_i$, et $P(a_i)$ sont n valeurs.
donc $\forall V \in \mathbb{R}^n$, $\exists\, a_i$ 2 à 2 indépendants et $V_i \in \mathbb{R}$, $V = (V_i P(a_i))_{1 \leq i \leq n}$, $i \in [1, n]$
F est surjective.

- Injectivité soit $F(P) = e_k = F(Q)$ alors $e_k = P(a_k) = Q(a_k)$ $\forall k \in N$
avec (I) et en déduisant l'injectivité $\Rightarrow$ bijectivité

III 1) Soit $P(a_k) = f(a_k)$
II - 2) on a vu que les $P(a_k)$ forment une base de dimension n.
avec l'hypothèse de linéarité et la bijectivité des bases alors $\exists!\, P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $k \in [1, n]$ $P(a_k) = f(a_k)$

2) $P(X) = f(a_1) L_1(X) + \dots + f(a_i) L_i(X) + \dots + f(a_n) L_n(X)$

Partie B

I 1) théorème de Rolle $(f / C^0/[a,b]\ C^1/]a,b[) = (f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\, c, f'(c) = 0)$ au moins 1

2) (g C^n et s'annule en $n+1$ point distinct) $\Rightarrow g(a_1) = \dots = g(a_{n+1}) = 0 \Rightarrow \exists\, a_{i,1}$, $g^{(1)}(a_i) = 0$ $i \in [1, n]$
n fois $\Rightarrow \exists\, a_{i,n}$, $g^{(n)}(a_i) = 0$ $i = 1$

II - 1)
en fait : P polynome d'interpolation de f donc $f(a_i) = P(a_i)$ $i \in [1, n]$
et $x - a_k = 0$ si $x = a_i$
donc g_c s'annule et $g_c(a_i) = 0$ pour $i \in [1, n]$
+1 (si $x = c$ c distinct de a_k $\Rightarrow g_c(x) = 0$
$\Rightarrow g_c$ s'annule $n+1$ fois

2) g_c est composé de polynome C^∞ et de f $C^n[a, n]$ donc n dérivable.
I 2) $g_c^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

3) $h_c(x)$ est un produit de monome donc un polynome de coefficient dominant $h_c(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{c - a_k} x^n + Q(x)$ en dérivant n fois $Q^{(n)}(x) = 0$ car de degré $n-1$
$h_c^{(n)}(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{n!}{c - a_k}$
et $g_c^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - P^{(n)}(x) - (f(c) - P(c)) \prod_{k=1}^{n} \frac{n!}{c - a_k}$
$P \in \mathbb{R}_{n-1}(X) \Rightarrow P^{(n)}(x) = 0$

III - 1
1) II - 2) $\Rightarrow$ $\exists\, \xi \in (a, b)$, $g_c^{(n)}(\xi) = 0$
+ II - 3 $\Rightarrow$ $g_c^{(n)}(\xi) = 0 \Rightarrow f^{(n)}(\xi) = (f(c) - P(c)) \prod_{k=1}^{n} \frac{n!}{c - a_k} \Rightarrow (f(c) - P(c)) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \times \prod_{k=1}^{n}$

2) f est le polynome d'interpolation de P donc $f(a_k) = P(a_k)$
si $(c \neq a_k)$ alors $f(a_k) = P(a_k)$ et $0 = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \times \prod_{k=1}^{n} (c - a_k)$ ($\neq 0$, $= 0$)

3) on suppose $c \neq a_k$ et $\xi \in [a, b]$ f C^n
max $|f^{(n)}(\xi)| \leq \max f^{n}(x) \Rightarrow \left| \frac{n!\,(f(c) - P(c))}{\prod_{k=1}^{n}(c - a_k)} \right| \leq \max |f^{(n)}(x)|$

en substituant $f(c) - P(c)$: $\max_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)| = \max_{x \in [a,b]} \left| g_c(x) + \frac{f(c) - P(c)}{\prod_{k=1}^{n}} \times \prod_{k=1}^{n} \frac{x - a_k}{c - a_k} \right|$

$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)| \leq \max_{x \in [a,b]} \left| g_c(x) + \frac{\max_{x \in [a,b]} f^{(n)}(x)}{n!} \times \prod_{k=1}^{n} (x - a_k) \right|$???

(*) ($g_c(x)$??)

Voici les limites de mon corrigé :
Épreuve 1 Partie 1
Partie A
I-1 Il est possible d'aller plus loin dans la réflexion sur l'unicité du polynôme
III-3 L'élimination de la fonction gc(x) n'est pas explicitée
Partie E
II-1 La démonstration que trois points distincts et alignés ne peuvent etre sur la même parabole n'est pas faite.
Épreuve 2 Problème II Partie B
IV-1 La démonstration s'appuyant sur le théorème du transfert n'a pas été faite.

Partie C exemple

I 1) $\sin(x)$ est C^∞

d'après III - 1 $P = f(0) L_1(x) + f(\frac{\pi}{2}) L_2(x) + f(\pi) L_3(x)$

$= 1 \times \prod_{1 \leq i \leq 3} \frac{(X - a_i)}{a_k - a_i} = \frac{(x-0)(x-\pi)}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)} = -\frac{4}{\pi^2} x (x - \pi)$

2) $\max f^{(n)}(x) \leq 1$ (fonction sinus dérivée n fois)

B : $|f(x) - P(x)| \leq \max_{x \in [0,\pi]} |f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{3!} \times (x \times (x - \frac{\pi}{2}) \times (x - \pi))$.

3) tableau de variation de $x(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)$ = [point d'inflexion]

$\Rightarrow \frac{x\pi^2 - 3\pi x^2 + 2x^3}{2}$ dérivé $\Rightarrow x = \frac{-6\pi \pm 2\sqrt{3}\pi}{2 \times 6}$

et $|f(x) - P(x)| \leq \frac{(-3 \pm \sqrt{3})^3 \pi^3}{6 \times 16 \times 3^3}$

II) 1) $Q_1 = \{ P_0 = f(\frac{\pi}{1}) \times \frac{X}{\pi/1}$ pour $0 \leq x \leq \frac{\pi}{1} \}$

$Q_2 = \{ P_0 = f(\frac{\pi}{2}) \times \frac{X}{\pi/2}$ pour $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$; $P_1 = f(\frac{\pi}{2}) \times \frac{x - \pi}{\frac{\pi}{2} - \pi} + f(\pi) \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\pi - \pi/2}$ pour $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \}$

2) Q_n est C^∞ car en polynome hors des points $\frac{\pi}{n}$

pour les valeurs $a_k = \frac{k\pi}{n}$ on

lim P polynome d'interpolation aux points $\frac{k\pi}{n}$ donc

$\lim_{x \to \frac{k\pi}{n}} P_{k-1}(x) = f(\frac{k\pi}{n}) = \lim_{x^+ \to \frac{k\pi}{n}} P_k(x) \Rightarrow Q_n(x)$ est continue partout

3) Problème classique

on pose $y = x - \frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}$ donc et $y \in [-\frac{\pi}{2n} ; \frac{\pi}{2n}]$

$|(x - \frac{k\pi}{n})(x - \frac{(k+1)\pi}{n})| = |(y + \frac{\pi}{2n})(y - \frac{\pi}{2n})|$

le point d'inflexion est en 0 d'où $xy \leq \frac{\pi^2}{4n^2}$

4) donc $\forall x \in [\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}]$, $|f(x) - Q_n(x)| \leq \frac{1}{2!} \times \max_{x \in [\frac{k\pi}{n}, \frac{k+1}{2}]} f^{(n)}(x) \times (x - \frac{k\pi}{n})(x - \frac{(k+1)\pi}{2})$ [$= 1$ (sinus)]

et $\forall x \in [\frac{k\pi}{n}, \frac{k+1}{n}\pi]$, $|f(x) - Q_n(x)| \leq \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{4n^2}$ (II-3)

avec ceci pour tout $k \in [0, n-1]$ on generalise $\forall x \in [0, \pi]$

III la 2ème est moins contenue en $\mathbb{C}$ sur le polynome.

Partie D

I) $\det A_2 = a_2 - a_1$ $\det A_3 = (a_2 - a_1) \times (a_3 - a_1) \times (a_3 - a_2)$

II) 1) D'après II - 2) $F(P) = e_k$ et donc $e_k = P(a_k)$ degré n

d'où $e_k = \sum_{j=1}^{n} P_j a_k^j$ avec $k \in 1$ à n et F bijective.

on transforme (P_j) en (e_k)
vecteur colonne k valeurs n°k.

avec F bijectif les e_k et P_j sont distinct 2 à 2 et avec les n vecteurs indépendant pour k et j $\Rightarrow$ matrice $n \times n$. d'où la matrice

2) si les a_k sont 2 à 2 distinct les ligne de A ne sont pas liés par une relation linéaire et la matrice est inversible

3) ~~le système est lié et le déterminant est nul~~ si des a_k sont égaux alors F admet 2 valeurs d'ordonnée pour une même valeur d'abscisse ce qui n'est pas possible

III 1) le produit de polynome est un polynome.

donc $p(X) = (X - a_1) \cdots (X - a_{n-1}) = X^{n-1} + d_{n-1} + \cdots + d_1 X + d_0$

2) $P(x)$ admet donc pour solution $a_1, \ldots, a_{n-1}$

et $P(a_1) = 0, \ldots, P(a_{n-1}) = 0, p(a_n) \neq 0$)

d'où $A \begin{pmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p(a_n) \end{pmatrix}$ D

3) par combinaison linéaire en appliquant sur la colonne C_n

$C_n \Rightarrow C_n + d_{n-2} C_{n-1} + \cdots d_0 C_1$.

$\det (A)_n = \det \left| A'_{n-1} \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p(A_n) \end{matrix} \right| = p(a_n) \times \det A_{n-1}$

avec $p(a_n) = (a_n - a_1) \times \cdots \times (a_n - a_{n-1})$

4) par récurrence et combinaison linéaire on trouve

$\det (A) = \prod_{1 \leq h < k \leq n} (a_k - a_h)$

5) On a démontré la formule du déterminant de van der monde.

Partie E | Epreuve n°1

(I) (?) D est l'axe du foyer par la directrice ($x = 0$)

I-1) point A_i $a_i, b_i \in$ Parabole // D et vérifiant
$b_i = \gamma + \beta a_i + \alpha a_i^2$

Soit pour les 3 points
$$\begin{cases} \gamma + a_1\beta + a_1^2\alpha = b_1 \\ \gamma + a_2\beta + a_2^2\alpha = b_2 \\ \gamma + a_3\beta + a_3^2\alpha = b_3 \end{cases}$$

2) d'après III-4
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3\end{bmatrix}$$

$\det(A) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$
si deux abscisses sont identiques alors les a_i ne sont pas deux à deux distincts et $\det(A) = 0$
le système est lié et n'admet pas de solution.

3) a) si $\det(A) \neq 0$ les points sont 2 à 2 distincts et la matrice est inversible et existe alors une unique solution.

b) on supprime γ
$$\begin{cases}(a_2 - a_1)\beta + (a_2^2 - a_1^2)\alpha = b_2 - b_1 \\ (a_3 - a_1)\beta + (a_3^2 - a_1^2)\alpha = b_3 - b_1\end{cases} \quad (I)$$

d'où $\alpha = \dfrac{\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 \\ a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 \end{vmatrix}}$

c) $\alpha = 0 \iff$ numérateur $= 0$ avec $\det \neq 0$ $A_i \neq$
$\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix} = 0 \iff \exists$ un k, $\begin{cases} a_2 - a_1 = k(a_3 - a_1) \\ b_2 - b_1 = k(b_3 - b_1)\end{cases}$
ou $\overrightarrow{A_2A_1} = k\,\overrightarrow{A_3A_1}$

4) avec 3) c) si A_1, A_2, A sont alignés et distincts et n'y a pas de solution.
- $(A_i\, A_j)$ est parallèle à D d'équation $x = 0$ $a_2 = a_1$ ou $a_3 = a_1$
alors $a_i = a_j = cst$ si avec (I) on déduit $b_2 = b_1$ ou $b_3 = b_1$
- de la même manière pour $a_2 = a_3$ donc les points sont confondus ⇒ impossible

II cas général.
1) A_1, A_2, A_3 aligné alors $\overline{A_1A_2} = k\,\overline{A_1A_3}$

P, M, F

(XV)

Problème n°2

(3)

Partie A

I 1) $D_1 = 2$ $D_2 = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2\end{pmatrix} = 5$ $D_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix} = 8$

2) on pour $n = 3$ $D_3 = 2 \times D_2 - D_1$
- en appliquant de formule de calcul de déterminant ... chaque ligne

$$\det\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & & & 0\\ & & & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2\end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & & & \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ & & & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2\end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & -1 & & \\ 0 & -1 & 2 & & \end{vmatrix}$$

$= 2\,D_{n-1} + 1 \times (-1) \times D_{n-2}$ ↳ sous déterminant

3) $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$ et $D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2}$
d'où $D_n - D_{n-1} = 3$ et $D_n = D_{n-1} + 3$ et $D_n = 3 \times (n-1) + D_1$
$D_n = 3n - 1$ vérifié en 1, 2, 3

4) $n \geqslant 1$ donc $D_n > 0$ et A_n inversible.

II-1) soit $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n\end{pmatrix}$ A_n inversible $U = A_n^{-1} \times B$ et $A_n \times U = B$

en développant on obtient le système
$$\begin{pmatrix} 2u_1 - u_2 = b_1 \\ -u_1 + 2u_2 - u_3 = b_2 \\ -u_{n-2} + 2u_{n-1} - u_n = b_{n-1} \\ 0 \quad - u_{n-1} + 2u_n = b_n\end{pmatrix}$$
si on pose $u_0 = u_{n+1} = 0$
$$\begin{pmatrix} -u_0 + 2u_1 - u_2 = b_1 \\ -u_1 + 2u_2 - u_3 = b_2 \\ -u_{n-2} + 2u_{n-1} - u_n = b_{n-1} \\ -u_{n-1} + 2u_n - u_{n+1} = b_n\end{pmatrix}$$

2) u_i solution. $\dfrac{2i(n+1-i) - (i-1)(n+2-i) - (i+1)(n-i)}{2} = \dfrac{2i(n+1) - 2i^2 - 2i - 2i(n-i) + 2}{2} = 1$

(XV)

mais n'est pas la seule $v_i - u_i = 3n - 1$ (S.H.)
- en étudiant $x \in [0, n+1]$ $f(x) = \dfrac{x(n+1-x)}{2}$ on pose $y = x - \dfrac{n+1}{2}$
$y \in \left[-\dfrac{n+1}{2}, \dfrac{n+1}{2}\right]$ $f(y) = \dfrac{\left(y + \frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2} - y\right)}{2}$ $\max f(x) = \max f(y) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$
⇒ $\max(u_1, \ldots, u_n) \leqslant \dfrac{(n+1)^2}{8}$

3) a) $u_1 = u_n = \dfrac{1 \times n}{2}$ soit j, $u_j \leqslant u_1$ alors $\dfrac{j(n+1-j)}{2} \leqslant \dfrac{1 \times n}{2}$
$0 \leqslant n - j(n+1) + j^2$ admet pour racine 1 et n. $(n - j(n+1) + j^2)$ est négative sur $j \in [1, n]$
⇒ $\forall j \in]0, n[$ $0 > (j^2 - j(n+1) - n)$

b) puisque $u_1 = u_n = \min(u_1, \ldots u_n) = \dfrac{n}{2}$ et $n > 0$
alors $\forall i \in [1, n]$ $u_i \geqslant 0$

4) a) $\beta = \max(|b_1|, \dots, |b_n|)$ donc $\beta \geq 0$

Par linéarité matricielle $V + W = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix} = A^{-1} \left(2\beta \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 2\beta U$

avec 3) b) toute les composante de U sont positive ou nulle.

donc $\forall i \in [1,n] \ (v_i + w_i) \geq 0$ et $\forall i \in [1,n]$ $v_i \geq 0$ et $w_i \geq 0$

b) avec le 2^{en} $\max_{i \in [1,n]} |u_i| \leq \frac{(n+1)^2}{8}$

avec $v_i + w_i = 2\beta \times u_i$, $\max_{i \in [1,n]} (v_i + w_i) \leq \frac{\beta (n+1)^2}{4}$ et $v_i + w_i \leq \frac{\beta (n+1)^2}{4}$

c) $W - V = A_n^{-1} B = 2U$. $\forall i \in [1,n]$ $u_i = \frac{w_i - v_i}{2}$

avec $v_i + w_i \leq \frac{\beta(n+1)^2}{4}$ $u_i = \frac{w_i - v_i}{2} \leq \frac{(w_i + v_i)}{2} \leq \frac{\beta(n+1)^2}{8}$

Partie B

I) 1) f $C^n(I)$ $\int_a^b f'(t)\,dt = [f(t)]_a^b = f(b) - f(a)$ avec $n \geq 1$ f C^1 donc intégrable.

2) avec $n \geq 2$ f $C^2(I)$ et f'' est defini sur (I) on va procéde par IPP

$\begin{cases} u'(t) = 1 & u(t) = -(b-t) \\ v(t) = f'(t) & v'(t) = f''(t) \end{cases}$ $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt = -[(b-t) f'(t)]_a^b + \int_a^b f''(t)(b-t)\,dt$

$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \int_a^b f''(t) \times (b-t)\,dt$

3) Par récurrence on suppose vrai au rang n et verifie au rang $n+1$

on calcule $\int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} (b-t)^{n-1}\,dt$ par intégration par partie

$\begin{cases} u'(t) = (b-t)^{n-1} & u(t) = -\frac{(b-t)^n}{n} \\ v(t) = \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} & v'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n-1)!} \end{cases}$ $\int_a^b \frac{f^{(n)}(t)(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt = + \frac{f^{(n)}(a)}{(n)!} \times (b-a)^{n} + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)(b-t)^n}{n!}\,dt$

et on verifie par substitution la formule de taylor au rang $n+1$

II. 1) f est C^n sur $x \in [a,b]$ donc $f^{(n)}$ est continue sur $[a,b]$

d'après le théorème de la borne atteinte l'image d'un intervalle est un intervalle et $\exists M_n = \max_{x \in [a,b]} |f^{(n)}(x)|$

2) $\forall n$ $|f^{(n)}(x)| \leq M_n$ $\int_a^b \frac{|f^{(n)}(t)|}{(n-1)!} |b-t|^{n-1}\,dt \leq M_n \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$
$x \in [a,b]$

$\underbrace{\left| \int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} (b-t)^{n-1}\,dt \right|}_{(I)} \leq M_n \times \frac{(b-a)^n}{n!}$ avec $\left| \int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} (b-t)^{n-1}\,dt \right| \leq \int_a^b \frac{|f^{(n)}(t)|}{(n-1)!} |b-t|^{n-1}\,dt$

(et $a < t < b$)

en exprimant (I) dans la formule de Taylors $\Rightarrow$ □

Partie C

1

I) On suppose que f et h verifie $\begin{cases} \forall x \in [0,1] & f''(x) = h''(x) = g(x) \\ \text{et} & f(0) = h(0) = a \quad f(1) = h(1) = b \end{cases}$

avec f et h, $x \in C^2[0,2]$, $\exists c_1, c_2$ $f(x) = h(x) + c_1 x + c_2$

$f(0) = h(0) + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$
$f(1) = h(1) + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$ $\Big\} \Rightarrow f$ unique solution.

II $M_n = \max_{x \in [a,b]} |f^{(n)}(x)|$ pour $n = 4$ $M = M_4$ par decondition d'ordre un a,b!

on applique TL sur $[x-h, x]$ et $[x, x+h]$

$\left| f(x-h) - f(x) - f'(x)(-h) - \frac{f''(x) h^2}{2} - \frac{f'''(x)(-h)^3}{3!} \right| \leq \frac{M h^4}{4!}$

$\left| f(x+h) - f(x) - f'(x)(h) - \frac{f''(x) h^2}{2} - \frac{f'''(x)(+h)^3}{3!} \right| \leq \frac{M h^4}{4!}$

avec l'inégalité triangulaire $|u+v| \leq |u| + |v|$ $\left| f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) - f''(x) h^2 \right| \leq \frac{2 M h^4}{4!}$ $\Rightarrow$ □

III 1) avec A) II 4) si on a $u_0 = u_{n+1} = 0 = a = b$

on a $2u_i - u_{i-1} - u_{i+1} = -h^2 g(x_i)$

A_n est inversible pour $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ il existe B, $U = A_n^{-1} B$

en posant $B = A_n(U) = \begin{pmatrix} -h^2 g(x_1) \\ \vdots \\ -h^2 g(x_n) \end{pmatrix}$

2) avec les propriétés de linéarité

$A_n F - A_n U = A_n F - B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} - h^2 \begin{pmatrix} g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_n) \end{pmatrix}$

avec $g(x) = f''(x)$ et $f(x_0) = f(x_{n+1}) = 0$

$\left| \ldots - h^2 f''(x_i) \right| = [A_n(F-U)]_i$

on retourne $|2f(x_i) - f(x_{i-1}) - f(x_{i+1}) - h^2 f''(x_i)|$ $\Rightarrow$ □

et avec c-2 $[A_n(F-U)]_i \leq \frac{M h^4}{12}$ $\Rightarrow$ □

3) soit $\beta = \max_{i \in [1,n]}$ $|b_i| = \max_{i \in [1,n]} |-h^2 g(x_i)|$

avec A-II) $U = A_n^{-1} B$ et $\forall i \in [1,n]$ $u_i \leq \beta \frac{(n+1)^2}{8}$

et $[A_n(F-U)]_i \leq \frac{M}{12(n+1)^4}$ $\Rightarrow$ $\frac{\left| [f(x_{i+1}) - u_{i+1}] + [f(x_{i-1}) - u_{i-1}] - 2[f(x_i) - u_i] \right|}{h^2} \leq$ —

avec les expression $g(x_i) = f''(x_i)$

$\left| (f(x_{i+1}) - u_{i+1}) + (f(x_{i-1}) - u_{i-1}) - 2(f(x_i) - u_i) \right| \leq \frac{M}{12(n+1)^2}$

4) Plus n est grand plus l'approximation est précise.

Problème n°1 | Epreuve n°2

$T_{café} = 48°C$ $T_{ambiant} = 22°C$ $V_{café} = 15cl$ $V_{lait} = 3cl$.

$T_{mélange} = \frac{V_1T_1 + V_2T_2}{V_1+V_2}$ méthode d'euler : $T'(t) = -0,04(T(t) - Ta)$

T dérivable sur $[0,a]$ $t_i = \frac{ia}{n}$ $y_0 = \alpha$

$A_0(t_0, y_0)$ et D_0 $y(x) = F(y_0)x + b$.

$A_1(t_1, y_1) \in D_0$ et D_1 $y_1(x) = F(y_1)x + b$. y_1 valeur approchée de $T(t_1)$

$A_n(t_1, y_n) \in D_{n-1}$ et D_n $y_n(x) = F(y_n)x + b$ y_n valeur approchée de $T(t_n)$

I $t_0 = \frac{0}{n}, \dots, t_i = \frac{3i}{n}, \dots ; t_n = \frac{3n}{n}$

II A_k point d'abscisse t_k sur la droite D_k de coefficient D_k.
A_{k+1} t_{k+1} D_k

d'où $T_k(t) = F(T(t_k)) \times t + b$ b constante

avec $F(T(t_k)) = T'(t_k)$ et $T'(t_k) = -0,04(T(t) - Ta)$

D_k: $T_k(t) = -0,04(T(t_k) - Ta) \times t + b$ b constant

avec D_k pour les points A_k, A_{k+1}

III $y_{k+1} = T_k(t_{k+1})$ $y_k = T_k(t_k)$

$y_{k+1} - y_k = -0,04[y_k - Ta] \times \frac{3}{n}$ $\frac{3}{n} = t_{k+1} - t_k$.

$y_{k+1} = \left(1 - \frac{0,12}{n}\right) y_k + \frac{3 \times 0,04 \times Ta}{n} \Rightarrow D$

IV 1) B7 = (1 - 0,12/$B$3) x B6 + 3x0,04x$B$1/$B$3

2) en remplaçant le 3 par une valeur de t et modifiant la valeur.

V y_k est un nombre ; n est un entier ; i est un entier ; $n > 0$

saisir valeur y_k saisir valeur n.

Pour i : 0 à n

y_k prend la valeur $\left(1 - \frac{0,12}{n}\right) y_k + \frac{2,64}{n}$

Fin Pour.

Partie B) I) $\begin{cases} y'(t) = -0,04(y(t) - 22) \\ y_0 = \alpha = 48 \end{cases}$

on pose $y(t) = Ke^{-\omega t}$ et solution de $y'(t) = -0,04(y(t) - 22)$

$y(t) = 22$ solution particulière de l'équation.

$y(t) = Ke^{-\omega t} + 22$ $y(0) = 48$ $K = 26$ donc $y(t) = 26e^{-\omega t} + 22$

en substituant $(l - \alpha)\omega = -0,04((l-\alpha) - l)$

$\omega = -0,04 \frac{\alpha}{l - \alpha} = \frac{0,04\alpha}{l - \alpha}$

avec $\begin{cases} \text{alimi} & \alpha = \frac{15 \times 48 + 3 \times 22}{18} \text{ et } t = 3 \\ \text{Bertrand} & \alpha = 48 \text{ puis } t = 3 \text{ et } T = \frac{15 \times y(3) + 3 \times 22}{18} \end{cases}$

Partie C I 1) d'après A - III $y_{k+1} = \left(1 - \frac{0,12}{n}\right) y_k + \frac{2,64}{n}$ avec n fixé, $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$ (1)

($a = 1 - \frac{0,12}{n}$, $b = \frac{2,64}{n}$)

2) soit $l = al + b$

$l = \frac{b}{1-a} = \frac{2,64}{n} \times \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{0,12}{n}\right)} = 22$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ température ambiante

3) $\left.\begin{array}{l} (y_k - l) = a(y_{k-1} - l) \\ (y_1 - l) = a(y_0 - l) \end{array}\right\}$ suite géométrique.

$y_k = l + a^k(y_0 - l)$

ou $y_n = T_n(3) + a^n(\alpha - l) = T_n(3) + \left(1 - \frac{0,12}{n}\right)^n(\alpha - l)$

4) $\lim_{n \to \infty} T_n(3) = l = 22$ car $\lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{0,12}{n}\right)^n = 0$

5) $T(3) - T_n(3) = \left(1 - \frac{0,12}{n}\right)^n(\alpha - l) \simeq (\alpha - l)\left(1 - \frac{n \times 0,12}{n}\right)$

Problème n°2

Partie A : $b = 2$ $r = 3$

I - 1) arbre : $r/N \to R$; $b/N \to B$; puis $r-1/N \to R$, $b+1/N \to B$; puis $r-2/N \to R$, $b+2/N \to B$; puis $0 \to R$, $b+3/N \to B$

2) a) $X = \{1, 2, 3, 4\}$ (X nombre de tirage effectué à la fin de l'expérience pour obtenir une boule blanche)

b)

X	1	2	3	4
$p(X)$	$\frac{b}{N}$	$\frac{r \times b+1}{N^2}$	$\frac{r \times r-1 \times b+2}{N^3}$	$\frac{r \times r-1 \times r-2}{N^3} \times \frac{b+3}{N}$
	$2/5$	$9/25$	$6 \times 4/5^3$	$6 \times 5/5^4$

$= \frac{25}{25}$ } $E(X) = \sum x\,p(x)$ tirage moyen où on a un blanc

II - 1) on refait 3 x la même expérience donc 3 x l'arbre

2) Y nombre de boule rouge $r = 3$ à chaque expérience.

a) $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

b)

Y	1 2 3	4 5 6	7 8 9
$p(Y)$	$\frac{r}{N}$ $\frac{r \times r-1}{N}$ $\frac{r \times r-1 \times r-2}{N}$		

$E(Y)$ nombre moyen de boule rouge après $N/2$ tirage

III a) le programme simule le descriptif pour un tirage à savoir on remplace une boule rouge par une blanche ou on affiche blanche.

2) L'expérience du A-I itère la boucle jusqu'à l'apparition d'une boule blanche il suffit donc d'intégrer une boucle tant que ou

Entier (b, r) ; resultat ← "".

Tant que (r > 0 et (resultat = "" ou resultat ← rouge)

faire

Si (a > b) alors

resultat ← rouge

b ← b+1

r ← r-1

Sinon resultat ← blanche

Fin Tant que (resultat)

Partie B généralisation

I - 1) b blanc et r rouge $\in \mathbb{N}$

$E = \{1, \dots, r\}$ au plus r tirage

2) Pour avoir $E(X=k)$ il faut que tout les tirage précédent soit des boule rouge ~~rouge~~ rouge donc $E(X=k) = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k$

3) a) $P(B) > 0$ $\boxed{P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$ ou $P(A\cap B) = P(B) \times P_B(A)$

b) $P(B_1 \cap \dots \cap B_i) > 0$ avec $B_1 \cap \dots \cap B_i \subset B_1 \cap B_2$ $P(B_1 \cap B_2) \geq 0$

donc $P(B_1 \cap \dots \cap B_i) = P(B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}) \, P(B_i \mid B_1 \cap \dots \cap B_{i-1})$

avec $P(B_1 \cap \dots B_{i-1}) = P(B_1 \cap \dots \dots B_{i-2}) \, P(B_{i-1} \mid B_1 \cap \dots \cap B_{i-2})$

on substitue et obtien $P(B_1 \cap \dots \cap B_i) = P(B_1) \, P(B_2 | B_1) \dots P(B_i | B_1 \cap \dots B_{i-1})$
entre les rang i et 1

4) a)

X	1	k
P	$P(B_1)$ $1 - P_R$	$1 - P_R$ $P(B_1 \cap \dots \cap B_k)$

avec 3b) X nombre de tirage =

b) X nombre de tirage pour obtenir une boule blanche

P_R probabilité boule rouge

P_B probabilité d'avoir une boule blanche pour $x > r$ $P_B(X = r+1) = \frac{r!}{N^r}$ (on a consommé tout les rouge et peut arriver à $x > r$)

$P(X=1) = 1 - \frac{r}{N}$; $P(X=2) = \frac{r}{N} - \frac{r \times (r-1)}{N^2}$ ← ne pas avoir de rouge ensuite
$= \frac{b}{N}$ (avoir du rouge avant)

donc au rang k $P(X=k) = \frac{r \times \dots (r-k)}{N^{k-1}} - \frac{r \times \dots (r-k+1)}{N^k} = \frac{r!}{(r-k+1)!\,N^{k-1}} - \frac{r!}{(r-k)!\,N^k}$

au rang r+1, on a forcement une boule blanche d'où $P(X = r+1) = \frac{r!}{N^r}$ (probabilité de n'avoir que des rouge avant)

5) a) $\sum_{k=1}^{n} k(p_{k-1} - p_k) = \sum_{k=1}^{n} k p_{k-1} - \sum_{k=1}^{n} k p_k = \sum_{k=1}^{n} p_{k-1} + \sum_{k=1}^{n} (k-1) p_{k-1} - \sum_{k=1}^{n} k p_k$

avec $\sum_{k=1}^{n} p_{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} p_k$ et $\sum_{k=1}^{n} (k-1) p_{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-1} + 0 \times p_0 \Rightarrow \square$

b) $E(X) = \sum_{k=1}^{r+1} k P(X=k) = \sum_{k=1}^{r} k(p_{k-1} - p_k) + (r+1) \times p_{r+1}$ et $p_k = \frac{r!}{(r-k)!\,N^k}$

$\underset{(5a)}{=} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{r!}{(r-k)!\,N^k} - (r \cdot k) \frac{r!}{0!\,N^r} + (r+1) \frac{r!}{N^r}$

$= \sum_{k=0}^{r} \frac{r!}{k!(r-k)!} \frac{k!}{N^k} - (r)\frac{r!}{N^r} + (r+1)\frac{r!}{N^r}$ et $\frac{k!}{N^r} = \binom{r}{r} \frac{\ }{N^r}$
$= \binom{r}{k}$

$= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \times \frac{k!}{N^k}$

II Seconde expérience aléatoire. ②

1) a) b blanc r rouge n tirage $P(Y_n = k) = 1$ $k > n$ ou (0 si on a dépassé le nombre de boule ?)
(XX)

b) $P(Y_n = k) = P(Y_n = r) + P(Y_n > r)$

c) $P(Y_n \neq 0) = 0$ pour aucun tirage

2) $P(Y_n = k \mid Y_{n-1} = i) = \frac{P(Y_n = k \cap Y_{n-1} = i)}{P(Y_{n-1} = i)}$

au rang n on a k rouge

↳ au rang n-1 on avait k rouge

↳ au rang n-1 on avait k-1 rouge

k rouge à n-1 $\Rightarrow P(Y_n = k \cap B) = P(Y_n = k \mid Y_{n-1} = k) \times \left(\frac{b+k}{N}\right)$
(probabilité = b + k rouge remplacé par des blanc ⇒

k-1 rouge à n-1 + 1 trouvé $\Rightarrow P(Y_n = k \cap R) = P(Y_n = k \mid Y_{n-1} = k) \times \left(\frac{r-(k-1)}{N}\right)$ nombre de rouge restante

d'où $P(Y_n = k) = P(Y_n = k \cap B) + P(Y_n = k-1 \cap R) \Rightarrow \square$

Y_{n-1} —R→ $Y_n = $; —B→ $Y_n = $

3) $E(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} k P(Y_n = k) = \sum_{k=1}^{n} k \frac{b+k}{N} \left(P(Y_{n-1} = k)\right) + \sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{r+1-k}{N}\right) P(Y_{n-1} = k-1)$

$+ n\left(\frac{b+n}{N}\right) P(Y_{n-1} = n)$ avec $l = k+1$

$E(Y_n) = (0+1) \times \left(\frac{r+1-(0+1)}{N}\right) P(Y_{n-1} = 0) + (k+1)\left(\frac{r+1-(k+1)}{N}\right) P(Y_{n-1} = k)$

$+ \sum_{k=1}^{n-1} \left[k \left(\frac{b+k}{N}\right) P(Y_{n-1} = k) + (k+1)\left(\frac{r+1-(k+1)}{N}\right)\right] + n\left(\frac{b+n}{N}\right) P(Y_{n-1} = n)$ (= 0 ?) (??)

$E(Y_n) = \frac{r}{N} P(Y_{n-1} = 0) + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{(N-r+k)k + (k+1)(r-k)}{N} P(Y_{n-1} = k) \right]$

pour k=1 ; les k se simplifie et $\frac{Nk + (r-k)}{N}$

$E(Y_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r + k(N-1)}{N} \left(P(Y_{n-1} = k\right)$

$= \frac{r}{N} \sum_{k=0}^{n-1} P(Y_{n-1} = k) + \sum_{k=0}^{n-1} k \left(P(Y_{n-1} = k)\right) \times \left(1 - \frac{1}{N}\right)$
$= 1$; $E(Y_{n-1})$

4) a) il s'agit d'une suite arithmético-géométrique.

vérifie pour 1 $E(Y_1) \overset{(3)}{=} \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(Y_0) + \frac{r}{N} \overset{4)a)}{=} r\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)\right) = \frac{r}{N}$
$E(Y_0) = 0$

on suppose vrai pour n-1 et injecte dans (3)

$E(Y_n) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \times r\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}\right) + \frac{r}{N} = r\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n + r\left(1 - \frac{1}{N}\right) + \frac{r}{N} \Rightarrow r$

vérifié par récurrence

b) • $N = b + r > 0$ donc $1 - \frac{1}{N} < 1$ et $\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n < 1$

$\lim_{n \to \infty} (E(Y_n)) = r + \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{N}\right) = r$
$\to 0$

• $|E(Y_n) - r| = \left|\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right|$ avec $N > 2$ (2 boule) et $n > 2$ (n tirages) : $\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$1 > \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n > \frac{1}{\dots}$ $n > 2$

(XX) donc $\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \leq \frac{1}{\dots}$ $n \gg N$

Epreuve n°2 Problème II Partie B

③

III-1) formule des probabilités totale

i) Ω espace, $\{B_i\}$ dénombrable. $\{B_i\}_{i \in I}$ système complet $\iff$ $B_i \neq \emptyset$ + B_i incompatible $(B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j)$ + $\bigcup_i B_i = \Omega$

ii) (probabilité totale : $P(B_i) \neq 0$ $\forall A \in \Omega$ $PA = \sum_i P_{B_i}(A)\, P(B_i) = \sum_i P(A \cap B_i)$

$$P(A_{k+1}) = \sum_{i=0}^{k} \frac{r-i}{N} \times P(Y_k = i)$$

A_{k+1} est rouge ; $\frac{r-i}{N}$: pour $Y_k = i$ sa probabilité d'être rouge avec $r-i$ boule ; $P(Y_k=i)$: probabilité d'être arrivé jusqu'à i boule rouge.

2) III-3)
$$E(Y_{k+1}) = \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{r-i}{N} + \frac{iN}{N}\right) P(Y_k = i) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(Y_k) + \frac{r}{N}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{r-i}{N} P(Y_k = i) + \sum_{i=0}^{k} i \times P(Y_k = i) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(Y_k) + \frac{r}{N}$$

$P(A_{k+1})$ $+ E(Y_k)$ $= \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(Y_k) + \frac{r}{N}$

$$\Rightarrow P(A_{k+1}) = \frac{r - E(Y_k)}{N} \Rightarrow \square$$

IV 1)

2) $$E(Y_n(Y_n - 1)) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(k-1)(N-2) + 2(r-1)k}{N} P(Y_{n-1} = k)$$

II-2) $\Rightarrow$ $$E(Y_n(Y_n - 1)) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(k-1)(N-2) + 2(r-1)k}{N} \left[\frac{N-r+k}{N} P(Y_{n-2} = k) + \frac{r+1-k}{N} P(Y_{n-2} = k-1)\right]$$

$$E(Y_n(Y_n - 1)) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k[(k-1)(N-2) + 2(r-1)]}{N^2} \times (N-r+k) P(Y_{n-2} = k) + \sum_{k=0} \frac{(k)(k-1)(N-2) + 2(r-1)(k-1)}{N} \times \frac{r-k}{N} P(Y_{n-2} = k)$$

en étudiant les termes en $\frac{N-2}{N}$: $\frac{N-2}{N}\left[\frac{k \times k-1 \times (N-k+k)}{N} + (k-2)(k-1)(r+2-k)\right] = \frac{N-2}{N}\frac{(k-1)}{N}[\ldots]$

et le terme $\frac{k P(Y_{n-1} = k)}{N} = \frac{E(Y_{n-1})}{N} [\ \ldots\ ]$

$\Rightarrow \square$

3) $n = 0$ $E(Y_0(Y_0 - 1)) = r \times (r-1) \times (1 - 1) = 0$

série arithmético géométrique soit $E_n = E(Y_n(Y_n - 1))$

$$E_n = \left(1 - \frac{2}{N}\right) E_{n-1} + 2r\frac{(r-1)}{N}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}$$

vrai au rang 1 $E_1 = \left(1 - \frac{2}{N}\right) \underset{=0}{E_0} + \frac{2r(r-1)}{N} \times 1$

on suppose vrai en $n-1$ et vérifie au rang n

$$E_n = \left(1 - \frac{2}{N}\right)\left[r \times (r-1)\left(1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n-1} - 2\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}\right)\right] + \frac{2r(r-1)}{N}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)\right)^{n-1}$$

$$= \left(1 - \frac{2}{N}\right) r \times (r-1) + r \times r-1 \left(\left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{2}{N}\right)\right) + \frac{2r(r-1)}{N}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)\right)^{n}$$

$$= r \times r-1 + r \times r-1 \times \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - \left[2\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n + \frac{2}{N}\left(1 - \frac{1}{N}\right)\right] r \times r-1 + \frac{2r \times r-1}{N}\left(-\left(1 - \frac{1}{N}\right)\right)$$

$\Rightarrow \square$ par récurrence au rang n.

4) $V(Y_n) = E(Y_n^2) - E^2(Y_n) = E(Y_n(Y_n - 1)) + E(Y_n) - E^2(Y_n)$

$E(Y_n(Y_n - 1)) = r(r-1)\left(1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right)$

$- E(Y_n) = + r\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right)$

$- E^2(Y_n) = - r^2\left(1 - 2\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{2n}\right)$

les termes en $r\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \left[-2(r-1) - 1 + 2r\right] = r\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$

les termes $r \times (r-1) \Rightarrow r(r-1) + r - r^2 = 0$

les termes en $\left(1 - \frac{2}{N}\right)^n \left[r(r-1)\right]$ et $-r^2\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{2n} \Rightarrow \square$

V-1) $\lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{2}{N}\right)^n = 0$ $N > 2$

donc $\lim_{n \to \infty} V(Y_n) = 0$

-2) inégalité Bienaymé Chebychev $\exists E(Y_n), V(Y_n)$ alors :

$P(|Y_n - E(Y_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Y_n)}{\varepsilon^2}$

soit $\alpha > 0$ avec $\lim_{n \to \infty} V(Y_n) = 0$, $\lim_{n \to \infty} P(|Y_n - E(Y_n)| \geq \alpha) \leq \frac{0}{\alpha^2}$

une probabilité étant positive, $\lim_{n \to \infty} P(|Y_n - E(Y_n)| \geq \alpha) = 0$

-3) $P(|Y_n - E(Y_n)| \geq \alpha) = P(|(Y_n - r) + (r - E(Y_n))| \geq \alpha)$

"inégalité triangulaire adaptée" $\alpha < |(Y_n - r) - (r - E(Y_n))| \leq |Y_n - r| - |r - E(Y_n)|$

$\Rightarrow \square$

4) B II-4-b) $\Rightarrow |E(Y_n) - r| \leq \frac{1}{4}$ pour $n \geq n_0$

$P\left(|Y_n - r| \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = P\left(|Y_n - r| \geq \frac{1}{2}\right)$ (XX)

5) (XX)